Fysik C/B/A

Teorihæfte

HVERDAGSFYSIK

Hvordan kan en højttaler spille flere frekvenser samtidigt?

Indeholder bl.a.:

- Om lydbølger
- Geogebra animationer
- Lydbølger og superposition

Forfatter: Jens Christian Hansen
Redaktør: Søren Storm
Korrekturlæst og faktatjekket af:
Vibeke Axelsen (Egaa gymnasium)
Kim Vedel Pedersen (Nørre Gymnasium)
Margit From

Støttet af: novo nordisk fonden

Indholdsfortegnelse

Introducerende om bølger 1

Lydbølger 2

Matematisk beskrivelse af harmoniske bølger 3

Superposition 3

Resulterende bølge ved superposition af to bølger 3

Resulterende bølge ved konstruktiv interferens 4

Resulterende bølge ved destruktiv interferens 4

Stødtoner 5

Fourieranalyse af lyd 5

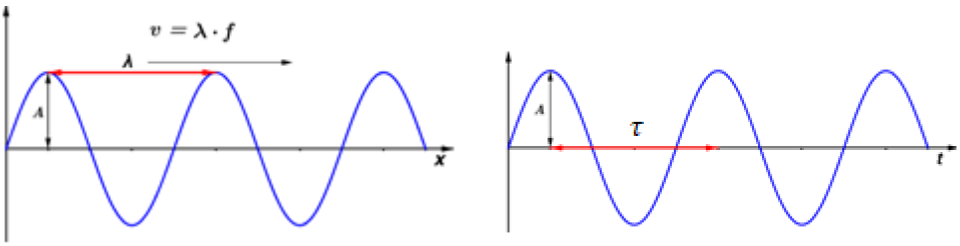
Introducerende om bølger

Det forudsættes at I kender til bølger og bølgeudbredelse. Vi antager derfor, at I kender begreberne amplitude (A), bølgelængde (λ), frekvens (f) og periode (τ), samt formlen for udbredelseshastigheden v af en bølge.

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{\tau}$$

og sammenhængen

$$f = \frac{1}{\tau}$$



Figur 1. Til venstre ses en harmonisk bølge afbilledet som funktion af afstanden x, til et fast tidspunkt. Her ser vi angivet bølgelængden λ, som afstanden mellem to bølgetoppe. Til højre, ses en harmonisk bølge, i en fast afstand fra en lydkilde. Bølgen vises som funktion af tiden t. Her ses perioden τ, som er den tid bølgen er, om at udbrede sig én bølgelængde. Bølgelængden er altså en afstand og perioden er en tid.

Lydens hastighed kan bestemmes med formlen: $v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}}$

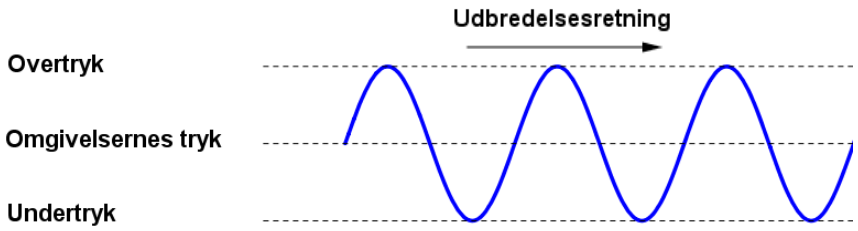
hvor v er lydens hastighed i luft, γ er en konstant som er 1,401 for atmosfærisk luft, R er gaskonstanten, M er tør lufts molarmasse, og T er temperaturen i kelvin. Formlen findes også i en forenklet udgave:

$$v = 331{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{\frac{T}{273{,}15\ \mathrm{K}}}$$

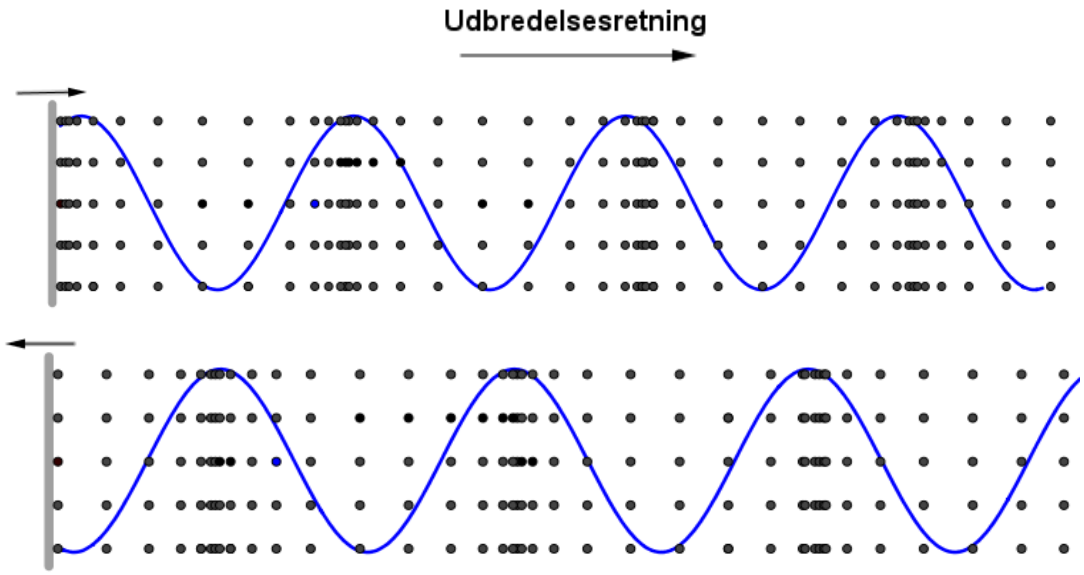
Lydbølger

Lydbølger udbreder sig i luft som trykbølger. Trykbølgerne fremkommer ved, at luftmolekylerne sættes i svingninger. Disse svingninger forplanter sig gennem luften, ved at molekylerne støder sammen. Ved svingningerne vil der skiftevis dannes et overtryk eller et undertryk, i forhold til det tryk der er i luften. Det er disse trykvariationer, der forplanter sig gennem luften.

Man kan illustrere variationen af trykket fra en harmonisk lydbølge, med en sinuskurve, som vist herunder.



Men i en lydbølge i luft, svinger molekylerne i udbredelsesretningen, og ikke på tværs af udbredelsesretningen. Lydbølger er altså *længdebølger.* Herunder ses en illustration af hvordan molekyletætheden foran en højttalermembran, der svinger harmonisk frem og tilbage, ændrer sig foran højttaleren. Det er *bølgen* og ikke molekylerne, der bevæger sig fremad gennem luften. Du kan også se det som en animation her.



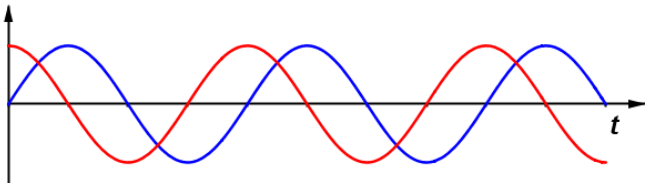
Matematisk beskrivelse af harmoniske bølger

Mindre kendt er nok, at harmoniske bølger kan matematisk beskrives ved funktionen

$$y(t,x) = A \cdot sin\left(\frac{2\pi}{\tau} \cdot t + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi\right) = A \cdot sin\left(2\pi f \cdot t + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi\right)$$

hvor y er udsvinget fra ligevægt, $2\pi f \cdot t + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x$ kaldes *fasen* og φ for *faseforskydningen*.

Grafen herunder viser betydningen af φ. Den blå graf viser resultatet af en måling, af en lydbølge målt i en afstand x fra lydgiveren. Den røde graf, viser resultatet af en måling af samme lydbølge, der er faseforskudt $\frac{\pi}{2}$, svarende til en faseforskydning på en kvart periode.



Ofte vil man stå i en bestemt afstand x fra lydgiveren, og dermed bliver $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x$ i fasen $2\pi f \cdot t + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi$ en konstant k. I det tilfælde bliver udtrykket

$$y(t) = A \cdot sin(2\pi f \cdot t + k + \varphi)$$

hvor $k + \varphi$ svarer til en 'ny' faseforskydning.

Superposition

Bølger, herunder lydbølger, kan passere uændret gennem hinanden. Det vil sige at hverken amplitude, bølgelængde eller frekvens, er ændret efter passagen. Det gælder uanset de enkelte bølgers bevægelsesretning. Når bølger passerer gennem hinanden, siger man at de *interfererer.* Befinder vi os et sted, hvor to lydbølger er til stede samtidig, vil det udsving (lydtryk), man måler, være lig med summen af de enkelte bølgers udsving regnet med fortegn i forhold til omgivelsernes tryk. Dette princip kaldes *Superpositionsprincippet.*

- Superpositionsprincippet er forklaret i videoen her.
- Du kan selv afprøve det her

Resulterende bølge ved superposition af to bølger

Vi befinder os et bestemt sted x i afstanden fra en lydgiver, der udsender to lydbølger med samme amplitude men forskellige frekvenser f_1 og f_2 og faseforskydninger. Bølgeformlerne for de to lydbølger bliver så

$$y_1(t) = A \cdot sin(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_1) \text{ og } y_2(t) = A \cdot sin(2\pi f_2 \cdot t + \varphi_2)$$

Fra superpositionsprincippet får vi så, at det samlede udsving fra de to bølger i punktet x, som funktion af tiden, er givet ved

$$y(t) = A \cdot sin(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_1) + A \cdot sin(2\pi f_2 \cdot t + \varphi_2)$$

Der gælder følgende trigonometriske formel:

$$sin(a) + sin(b) = 2 \cdot sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Anvendes denne formel på ovenstående udtryk, fås

$$y(t) = A \cdot sin(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_1) + A \cdot sin(2\pi f_2 \cdot t + \varphi_2) = A \cdot \left(sin(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_1) + sin(2\pi f_2 \cdot t + \varphi_2)\right)$$
$$= A \cdot 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi f_1 \cdot t + 2\pi f_2 \cdot t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi f_1 \cdot t - 2\pi f_2 \cdot t + \varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right)$$

eller

$$y(t) = 2A \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi \cdot (f_1 + f_2) \cdot t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (f_1 - f_2) \cdot t + \varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right)$$

Resulterende bølge ved konstruktiv interferens

Hvis vi antager at frekvenserne er ens $f_1 = f_2 = f$, og faseforskydningerne $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, dvs. ingen faseforskydning, fås

$$y(t) = 2A \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi \cdot 2f}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (f - f)}{2} \cdot t\right)\right) = 2A \cdot (\sin(2\pi f \cdot t) \cdot \cos(0))$$
$$= 2A \cdot \sin(2\pi f \cdot t) \cdot 1 = 2a \cdot \sin\,(2\pi f \cdot t)$$

Resultatet er en lydbølge, der har samme frekvens som de to oprindelige, men med en amplitude der er dobbelt så stor. Dette er et eksempel på såkaldt *konstruktiv interferens.*

Resulterende bølge ved destruktiv interferens

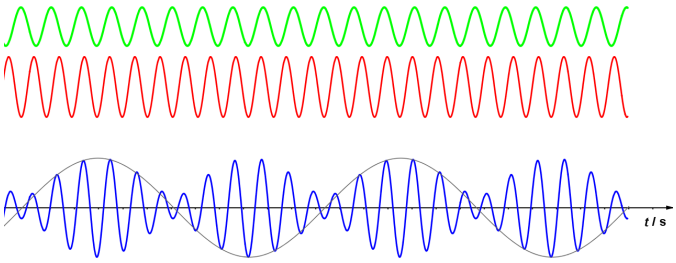
Hvis vi antager, at frekvenserne er ens $f_1 = f_2 = f$, og faseforskydningerne $\varphi_1 = \pi$ og $\varphi_2 = 0$, fås

$$y(t) = 2A \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi \cdot 2f}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (f - f)}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2A \cdot \left(\sin\left(2\pi f \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 2A \cdot \sin\left(2\pi f \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = 0$$

Resultatet er en lydbølge uden udsving. Dette er et eksempel på såkaldt *destruktiv interferens.*

Stødtoner

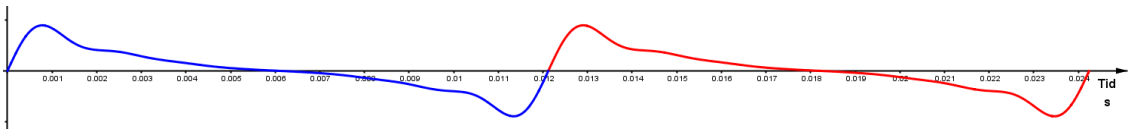
Herunder ses to lydbølger (grøn og rød). Frekvenserne af bølgerne er næsten ens. Superpositionen af de to bølger, vil typisk give en bølge som den nederste (blå). Denne bølge har en 'grundtone' med frekvensen $\frac{f_1+f_2}{2}$ og en 'overlejret' tone med længere periode altså en lavere frekvens $\frac{|f_1-f_2|}{2}$



Den overlejrede tone med den lavere frekvens, kaldes en 'stødtone', og kan som regel høres tydeligt.
Her kan du selv vælge to harmoniske funktioner og afprøve fænomenet selv.
Angives funktionen $2 \cdot \sin(3{,}14x)$, så gælder der $3{,}14 = 2\pi f$ og dermed $f = \frac{3{,}14}{2\pi} \cong 0{,}5$ Hz.
Bemærk at Geogebra benytter punktum i stedet for komma, som decimaltegn.

Fourieranalyse af lyd

Hvis vi spiller tonen A (440 Hz) på et klaver, og måler den lyd klaveret giver, vil man se denne graf.



Tonen klaveret giver, er periodisk. Den gentager sig selv efter ca. 0.012 s. Man kan vise matematisk, at enhver periodisk funktion $y(t)$ kan tilnærmes med en konstant og summen af sinus- og cosinusfunktioner.

$$y(t) \cong \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \sin(2\pi f \cdot t) + b_1 \cdot \cos(2\pi f \cdot t) + a_2 \cdot \sin(2\pi(2 \cdot f) \cdot t) + b_2 \cdot \cos(2\pi(2 \cdot f) \cdot t) +$$

$$a_3 \cdot \sin(2\pi \cdot (3 \cdot f) \cdot t) + b_3 \cdot \cos(2\pi \cdot (3 \cdot f) \cdot t) + \cdots + a_N \cdot \sin(2\pi \cdot (N \cdot f) \cdot t) + b_N \cdot \cos(2\pi \cdot (N \cdot f) \cdot t)$$

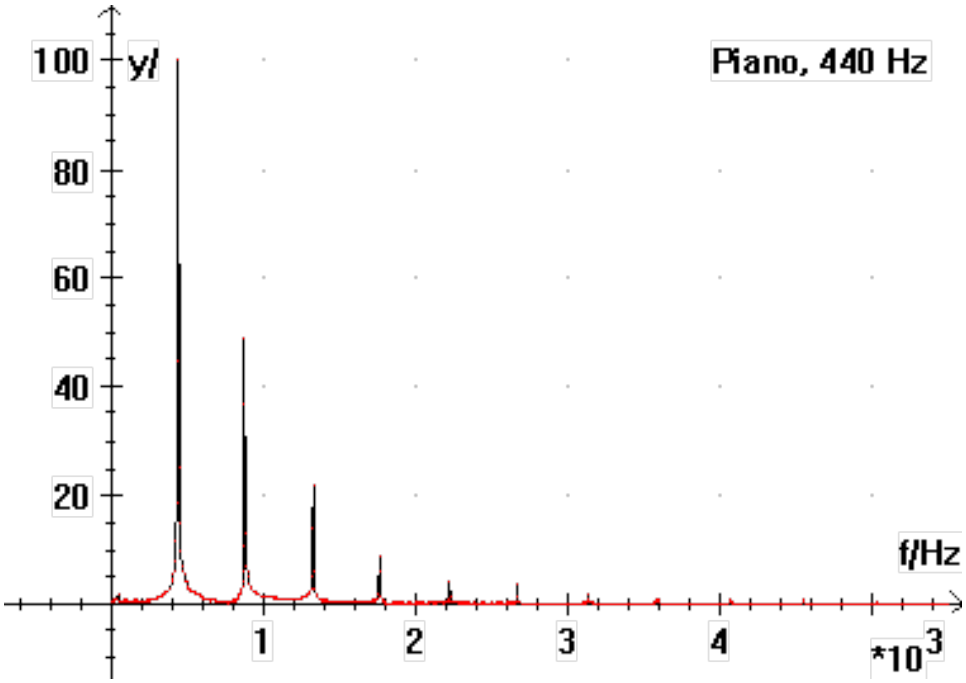
Konstanterne $a_0, a_1, a_2, \ldots a_N, b_1 b_2, \ldots, b_N$ kan bestemmes, hvis funktionen $y(t)$ er kendt. Det kræver et indgående kendskab til integralregning. Heldigvis findes der matematikprogrammer, der kan udføre disse beregninger for os. Ser vi på de harmoniske funktioner, der indgår i udtrykket for $y(t)$, ses at funktionen $y(t)$, skrives som en sum af de harmoniske funktioner, med frekvenserne $f, 2 \cdot f, 3 \cdot f, \ldots, N \cdot f$. Til hver af konstanterne, der er forskellige fra nul, svarer derfor en bestemt frekvens. Man kan tegne disse frekvenser ind i et koordinatsystem, med frekvensen ud ad førsteaksen og forholdet mellem konstanterne på andenaksen. Hvis man sætter den største konstant forskellig fra nul, til 1 eller 100, fremkommer et *frekvensspektrum (se figur 2).* Den mindste frekvens kaldes for grundtonen, og de øvrige for første overtone, anden overtone, tredje overtone osv.

For klaveret fås ved beregning til og med 8. overtone.

$$y(t) \cong 1 \cdot \sin(2\pi \cdot 440 \text{ Hz} \cdot t) + 0.45 \cdot \sin(2\pi \cdot 880 \text{ Hz} \cdot t) + 0{,}28 \cdot \sin(2\pi \cdot 1320 \text{ Hz} \cdot t) +$$

$$0{,}1 \cdot \sin(2\pi \cdot 1760 \text{ Hz} \cdot t) + 0{,}05 \cdot \sin(2\pi \cdot 2200\, Hz \cdot t) + 0{,}04 \cdot \sin(2\pi \cdot 2640\, Hz \cdot t) +$$

$$0{,}02 \cdot \sin(2\pi \cdot 3080 \text{ Hz} \cdot t) + 0{,}01 \cdot \sin(2\pi \cdot 3520 \text{ Hz} \cdot t)$$



Figur 2 Frekvensspektrum for en anslået kammertone (440 Hz) på et klaver. Den største konstant forskellig fra nul er her sat til 100. (figur fra www.datalyse.dk, Hemmingsen)

Når man måler lydsignaler, får man ikke en funktionsforskrift for den periodiske funktion. Man får kun en række tætliggende målepunkter, der gentages efter et vist tidsrum. Man er derfor henvist til numeriske metoder, når konstanterne $a_0, a_1, a_2, \dots a_N, b_1 b_2, \dots, b_N$ og dermed frekvenserne, skal bestemmes. Igen bliver vi reddet af matematikprogrammer, fx LoggerPro eller apps til telefonen. De benytter en særlig hurtig algoritme til at foretage sådanne numeriske beregninger. Den har forkortelsen FFT (Fast Fourier Transformation).