

HVERDAGSFYSIK

Hvor hård er en kogt kartoffel?

Indeholder bl.a.:

- Flere detaljer om hårdhedsmåleren
- Matematik A modeller for kogning af kartofler

Forfatter: Jens Christian Hansen

Redaktør: Søren Storm

Korrekturlæst og faktatjekket af:

Vibeke Axelsen (Egaa gymnasium)

Kim Vedel Pedersen (Nørre Gymnasium)

Margit From

Støttet af: **novo nordisk fonden**

Indholdsfortegnelse

Indholdsfortegnelse	1
Kort om dette teorihæfte.....	1
Hvad består en kartoffel af?	1
Hårdheden af kartofler.....	2
Hårdhedsmåleren fra videoen.....	3
Undersøgelse af hårdhed ved forskellige temperaturer.....	4
En simpel og en avanceret model for kogning af kartofler.....	5

Kort om dette teorihæfte

Dette hæfte er ment som et supplement til arbejdet med undervisningspakken "Hvor hård er en kogt kartoffel?". Hæftet indeholder en oversigt over begreber, der naturligt indgår når der arbejdes med undervisningspakken.

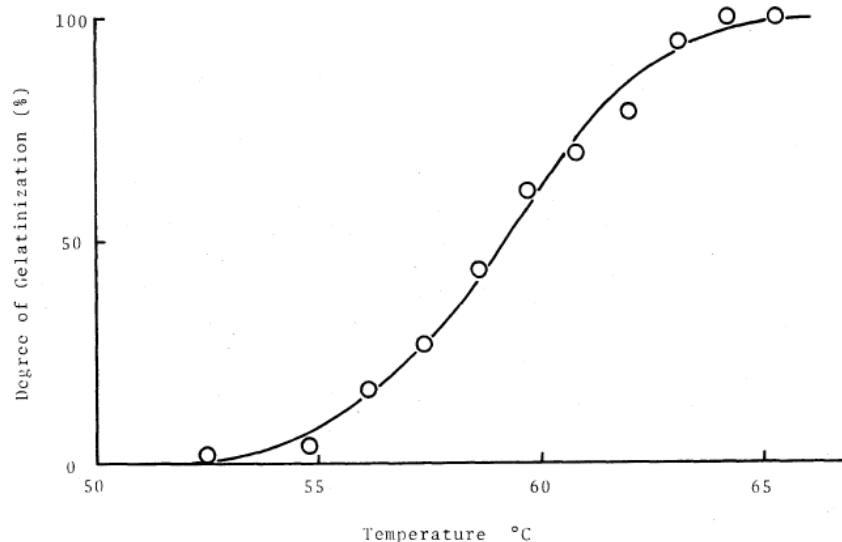
Hvad består en kartoffel af?

Overordnet består kartofler af (ca.):

81% vand, 17% kulhydrater/carbonhydrider, 1,8% protein og 0,2% fedt.

Kulhydraterne findes overvejende som stivelseskorn, såkaldte *granulater*, indkapslet i en cellestruktur. Spises en rå kartoffel kan fordøjelsessystem ikke umiddelbart udnytte energien i stivelseskornene. Opvarmes kartoflerne, vil granulaterne optage vand, svulme op og briste. Denne omdannelse kaldes gelering. Ved geleringen omdannes stivelse til en form, som vi kan optage i vores fordøjelsessystem og dermed udnytte den energi, der er i stivelsen.

Omdannelsen af stivelseskornene sker ikke ved én bestemt temperatur, men i et temperaturinterval. Herunder ses en graf, der illustrerer, hvor stor en brøkdel af stivelseskornene, der er geleret, som funktion af temperaturen. Temperaturintervallet, her fra 55 °C til 65 °C, kan variere en lille smule afhængig af mængden og størrelsen af stivelseskornene samt af kartoffeltypen.



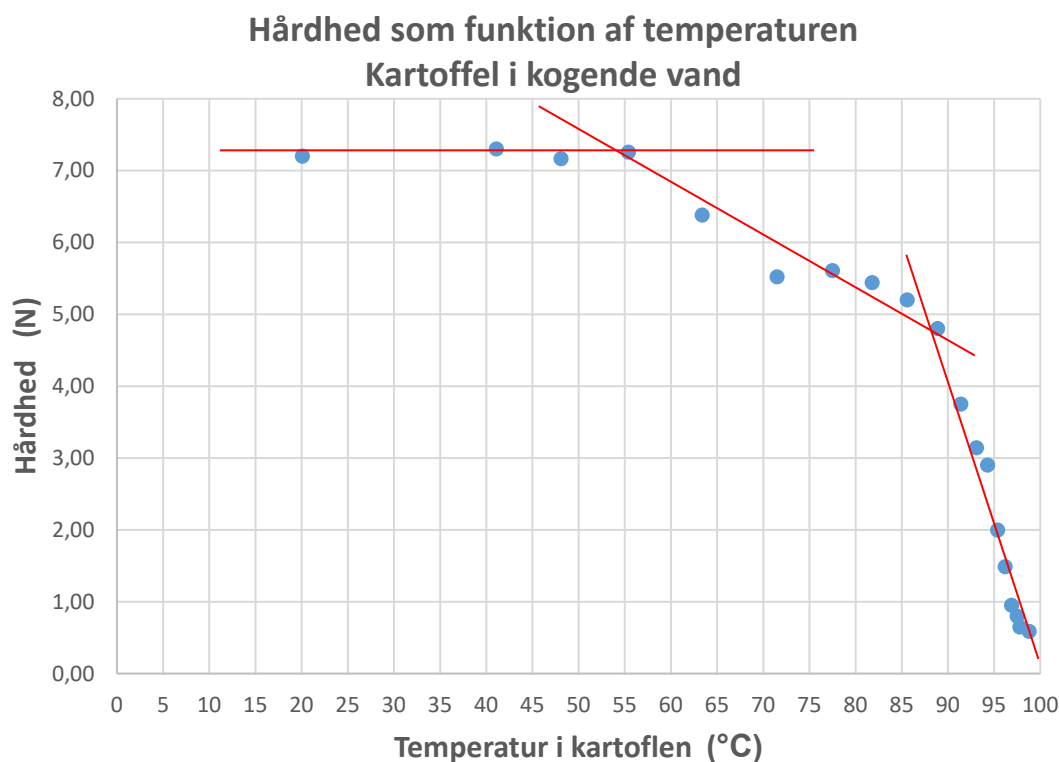
Figur 1 Toshiko Shiotsubo (1983) Starch Gelatinization at Different Temperatures as measured by Enzymic Digestion Method, *Agricultural and Biological Chemistry*, 47:11, 2421-2425

Spises en varm kartoffel, der er tilberedt ved 70 °C, vil man kunne udnytte energien, der er lagret i kartofflens stivelse, men kartofflen vil stadig være hård og smage 'rå'.

Hårdheden af kartofler

Hvor hård en kartoffel opleves, når den spises, er jo en individuel vurdering, så for at få et mål for 'hårdheden' kan en kraftmåler bruges, hvor på vi har monteret en tandstik. Kraftmåleren registrerer den kraft, der skal til, for at stikke tandstikken ind i samme dybde af kartofflen hver gang.

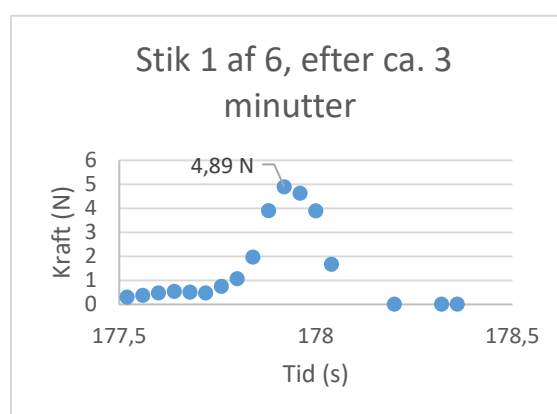
Måler man "hårdheden" på den beskrevne måde, i det indre af en kartoffel som funktion af temperaturen, vil man typisk få en sammenhæng, som ses på grafen herunder. Det er vigtigt at understrege, at de målte hårdheder er afhængige af den anvendte målemetode, altså selve måleapparatet. Var det en anden type 'spids' end tandstikken, og en anden stikkedybde, ville de målte hårdheder få en anden værdi. Men anvendes samme måleapparat under hele forsøget og i efterfølgende forsøg, kan værdierne sammenlignes.



Figur 2. Datapunkterne her er et gennemsnit af 6 stik i en overskåret kartoffel, sammenholdt med temperaturen af en kartoffels kerne, der har været i vandet i samme tidsrum. Det ses, at i temperaturintervallet fra 20 °C - 55 °C er hårdheden næsten konstant og over 7 N, i intervallet 55 °C - 90 °C falder hårdheden fra ca. 7 N til ca. 5 N, så der sker et fald i hårdheden ved geleringen. Mellem 85 °C og 95 °C falder hårdheden brat, til ca. 2 N af den rå kartoffels. Når kartoffelens temperatur er tæt på kogepunktet er hårdheden faldet til ca. 0,5 N; kartoffelen er gennemkogt og blød. Det sidste fald i hårdhed kan ikke forklares ved geleringen, men skyldes muligvis at cellestrukturen i kartoffelen nedbrydes.

Hårdhedsmåleren fra videoen

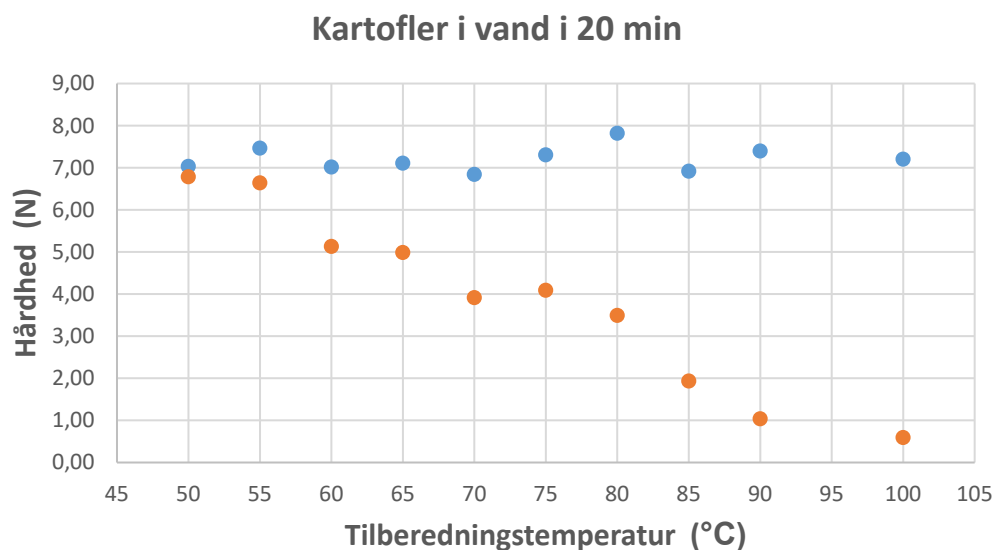
I videoen bruges en kraftmåler til at måle det vi kalder 'hårdheden' i kartoffelen. Den vil også kunne bruges til andre madvarer. Hårdhedsmåleren er en let modificeret kraftmåler. En tandstik monteres i en kraftmåler, i stedet for krogen. En møtrik limes på kraftmåleren, så tandstikken, når den stikkes ind i kartoffelen, når til samme dybde hver gang. Som mål for kartoffelens hårdhed bruges den størst målte kraft. På figur 3 ses et billede af den modificerede kraftmåler.



Figur 3 Til venstre principiel opbygning af hårdhedsmåleren. Til højre den højest målte værdi (her 4,89 N), under et stik, vælges som hårdhedsværdien. Dette udvælges for alle 6 stik, og middelværdien bruges som den målte værdi.

Undersøgelse af hårdhed ved forskellige temperaturer

På figur 4 ses resultatet af et eksperiment, hvor vi har målt hårdheden af samme størrelse kartofler efter 20 minutters opvarmning i vand, ved temperaturer mellem 50 °C og 100 °C, i skridt af 5 °C.



Figur 4 hårdheden som funktion af temperaturen, hvor små kartofler på ca. 35 g tilberedes i 20 minutter i vand ved konstante temperaturer mellem 50 °C og 100 °C, i spring af 5 °C. På grafen ses derfor resultatet af 10 forsøg, et for hvert temperaturspring. Hårdheden af kartoflerne er målt før (blå) og efter (orange). "Sous vides" staven der styrede temperaturerne, havde en maksimumstemperatur på 90 °C, derfor er 95°C sprunget over i målingerne. Normal kogetid for denne størrelse kartofler, når først vandet er i kog, er ca. 13 min.

Dette forsøg bekræfter, hvad det forudgående forsøg viste. Et fald i hårdhed i intervallet 55 °C– 70 °C, og igen et yderligere fald i hårdhed fra ca. 80 °C og frem. En prøvesmagning viste, at kartofler tilberedt ved 85 °C og 90 °C var mere faste at bide i end kogte kartofler og havde, modsat dem tilberedt ved lavere temperaturer, ikke smag af rå kartoffel.

OBS: Følgende er målrettet matematik på A niveau

En simpel og en avanceret model for kogning af kartofler

Når kartofler koges, så overføres varmeenergi fra det kogende vand ved direkte kontakt gennem den indbyrdes kontaktflade til det, der skal koges. Denne energioverførsel giver anledning til en temperaturstigning i kartofflen.

Hvis vi forestiller os, at en kartoffel kommer i kogende vand ($\sim 100^\circ\text{C}$) og temperaturen i vandet holdes konstant, vil temperaturudviklingen i kartoflerne som funktion af tiden t så kunne beskrives ved Newtons afkølings/opvarmningslov? Hvis det er tilfældet vil tilvæksten af kartofflens indre temperatur pr. tid skulle være proportional med forskellen mellem dens indre temperatur og vandets temperatur.

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_0 - T)$$

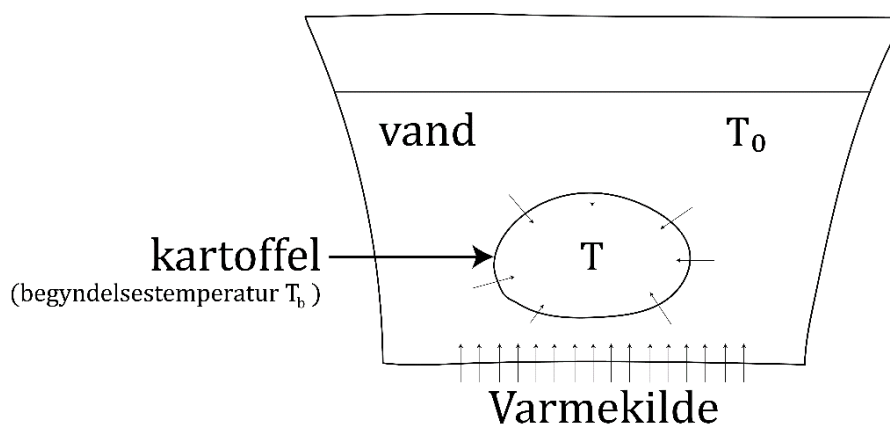
I det følgende undersøger vi, om vi kan bruge denne model til at forudsige kernetemperaturen af en kartoffel. k er en proportionalitetskonstant der afhænger af kartofflens specifikke varmekapacitet, densitet, termiske ledningsevne samt overfladeareal mellem kartoffel og vand. Ovenstående ligning er en differentialligning, som vi ikke vil bruge tid på at løse her. Betegnes begyndelsestemperaturen for kartofflen med T_b og vandets temperatur er T_0 er løsningen:

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_b) \cdot e^{-k \cdot t}$$

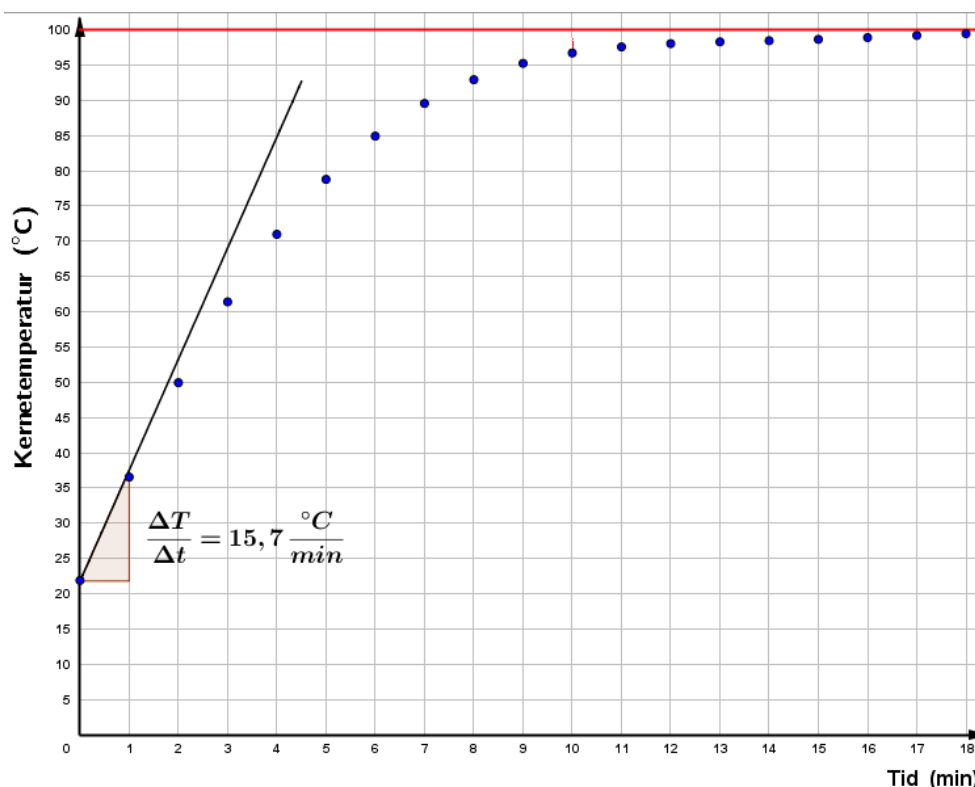
Og da vandet er 100°C

$$T(t) = 100^\circ\text{C} - (100^\circ\text{C} - T_b) \cdot e^{-k \cdot t}$$

For at teste om modellen kan bruges, til forudsigelse af kernetemperaturen under kogning af en kartoffel, måles temperaturen i det indre af en kartoffel (herefter kaldet 'kernetemperaturen'), som er kommet i kogende vand. Begyndelsestemperaturen i kartofflen er $21,9^\circ\text{C}$ og kartofflens masse er 45 g (lille kartoffel). Målepunkterne kan ses på figur 6.



Figur 5: En kartoffel med begyndelsestemperatur T_b , kernetemperatur T , samt vand ved temperaturen T_0



Figur 6 plot over kernetemperaturer som funktion af tiden, ved kogning af lille kartoffel på 45 g. Desuden er tangenten mellem de første 2 målepunkter, bestemt til $15,7\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$.

Hvis man i et forsøg ønsker at undersøge om modellen

$$T(t) = 100\text{ }^{\circ}\text{C} - (100\text{ }^{\circ}\text{C} - 21,9\text{ }^{\circ}\text{C}) \cdot e^{-kt}$$

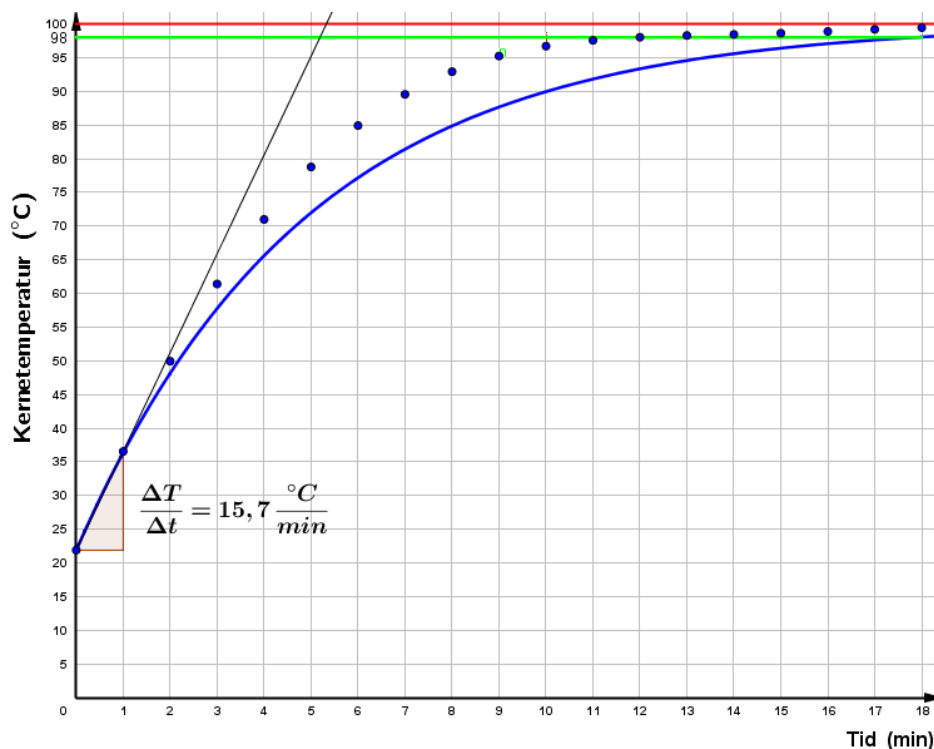
faktisk også beskriver kernetemperaturen af kartofflen korrekt, kan k bestemmes ud fra de målte data. Der gælder nemlig med god tilnærmelse:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \cong k \cdot (T_0 - T_b) \text{ og dermed } k \cong \frac{\frac{\Delta T}{\Delta t}}{T_0 - T_b}.$$

Her er $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ tangentens hældningskoefficient (de to første målepunkter benyttes). Den er bestemt i figur 6 til $15,7\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$. Proportionalitetskonstanten k kan nu bestemmes til:

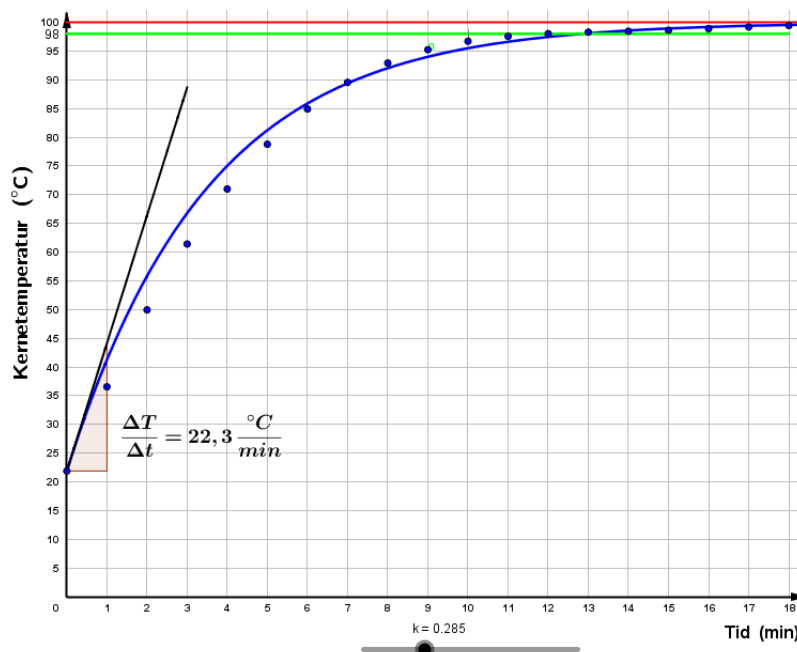
$$k \cong \frac{15,7\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}}{100\text{ }^{\circ}\text{C} - 21,9\text{ }^{\circ}\text{C}} = 0,202\frac{1}{\text{min}}$$

Grafen for funktionen $T(t) = 100 - 78,9 \cdot e^{-0,202 \cdot t}$ tegnes (se figur 7), og det er tydeligt, at modellen ikke beskriver udviklingen i kernetemperaturen korrekt. Erfaringen viser, at kartofler er gennemkogte, når temperaturen overalt inde i kartoflerne passerer $98\text{ }^{\circ}\text{C}$, denne temperatur er markeret med den vandrette grønne linje. Det ses at kartoflerne er færdigkogte efter ca. 12 min; altså væsentlig før det modellen forudsiger (17,5 min)



Figur 7 Samme målte kernetemperaturer som i figur 6. Her er modellen for proportionalitetskonstanten $k = 0,202 \frac{1}{\text{min}}$. Modellen viser dårlig overensstemmelse med de målte værdier.

Ved at variere k , undersøger vi (se figur 8) om vi med en anden værdi af k kan få modellen til bedre at beskrive de målte kernetemperaturer.



Figur 8 den bedst mulige værdi for proportionalitetskonstanten $k = 0,285 \frac{1}{\text{min}}$.

Den bedste overensstemmelse fås for værdien $k = 0,285 \frac{1}{\text{min}}$, hvilket fører til at $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ skal være $22,3 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$, altså en langt større temperaturstigning i starten end det vi har målt. Men selv for denne

værdi beskriver modellen ikke temperaturudviklingen tilfredsstillende. Den simple model må derfor forkastes.

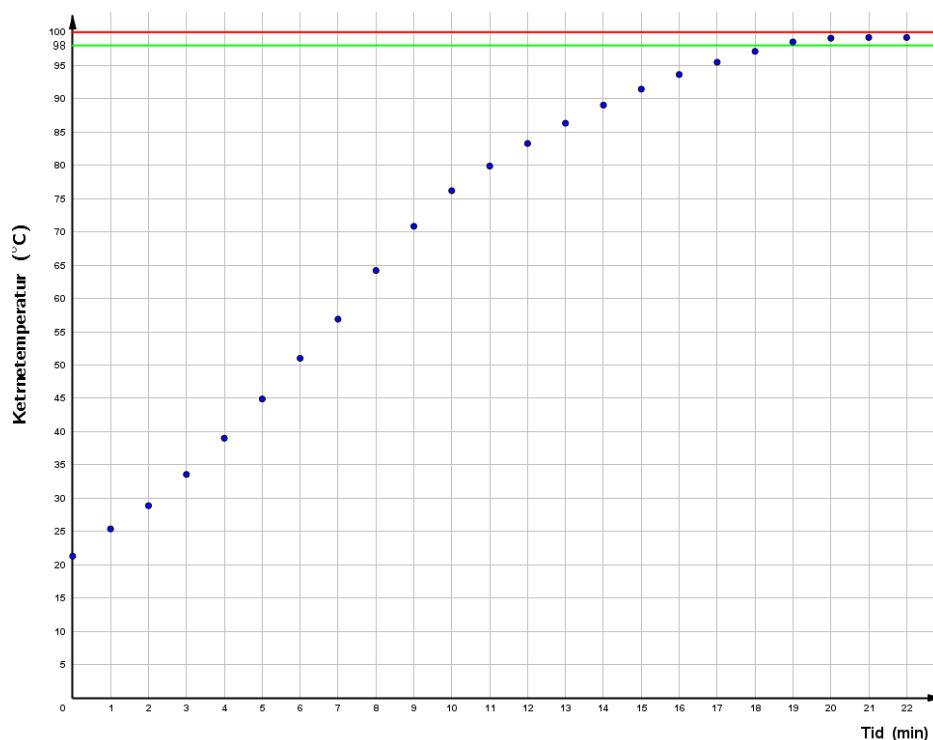
Der kan være flere forklaringer på ovenstående udvikling i kernetemperaturen. Én oplagt er, at varmeledning i kartofflen ikke sker øjeblikkeligt, hvilket kan forklare, hvorfor kernetemperaturen stiger for lidt i begyndelsen. Da varmeledning desuden typisk er svagt stigende med temperaturen, vil den øgede varmeledning gøre, at temperaturen stiger relativt mere efterhånden som temperaturen stiger. I forhold til den simple model, svarer det til at konstanten k afhænger af temperaturen T .

På Figur 7 ses en stor kartoffel der har været i kogende vand i 8 minutter. Den inderste del er stadig farvet som en rå kartoffel, så det må være rimeligt at antage at temperaturen ikke er den samme overalt i kartofflen og lavest i kernen.

Den påstand tjekker vi her, med en meget stor kartoffel. På nedenstående graf ses et plot af temperaturudviklingen for kernen i en kartoffel på 169 g.



Figur 9 En ufærdig overskåren kartoffel



Figur 10 Temperaturudviklingen i en kartoffel på 169 gram. Kartofflen er lagt i kogende vand ($T_0 = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$) (rød vandret linje) og kartofflens begyndelsestemperatur er $T_b = 21,3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kartofflen er tilberedt når temperaturen i kartofflens centrum overstiger $98\text{ }^{\circ}\text{C}$ (grøn vandret linje), som ses at være efter ca. 18,5 min.

Udviklingen i temperaturen (blå prikker) for den store, har et forløb der er meget forskellig fra temperaturudviklingen i både kartoflen på 45 g og den simple models forudsigelse. Udviklingen i temperaturen er S-formet og minder i højere grad om logistisk vækst. Så konklusionen er endnu en gang, at den simple model ikke kan bruges til at beskrive temperaturudviklingen i kartofler der koges.

Da konstanten k afhænger af varmeledningsevnen, kunne en modificeret model være

$$\frac{dT}{dt} = h \cdot (a \cdot T + b) \cdot (T_0 - T)$$

Hvor konstanten k i den simple model erstattes af det lineære udtryk $h \cdot (a \cdot T + b)$, hvor a er stigningen i varmeledning pr. grad ($^{\circ}\text{C}$) og dermed at varmeledningsevnen stiger lineært med T . Hvis $h \cdot (a \cdot T + b)$ omskrives til $k_1 \cdot T + k_2$ fås

$$\frac{dT}{dt} = (k_1 \cdot T + k_2) \cdot (T_0 - T) \quad (*)$$

hvis $T(0) = T_b$, er løsningen til denne differentialligning:

$$T(t) = \frac{T_0 - k_2 \cdot \frac{T_0 - T_b}{T_b \cdot k_1 + k_2} \cdot e^{-(k_1 \cdot T_0 + k_2) \cdot t}}{1 + k_1 \cdot \frac{T_0 - T_b}{T_b \cdot k_1 + k_2} \cdot e^{-(k_1 \cdot T_0 + k_2) \cdot t}}$$

For at tjekke at modellen stemmer med den simple model, sættes $k_1 = 0$. Da reducerer ovenstående udtryk til

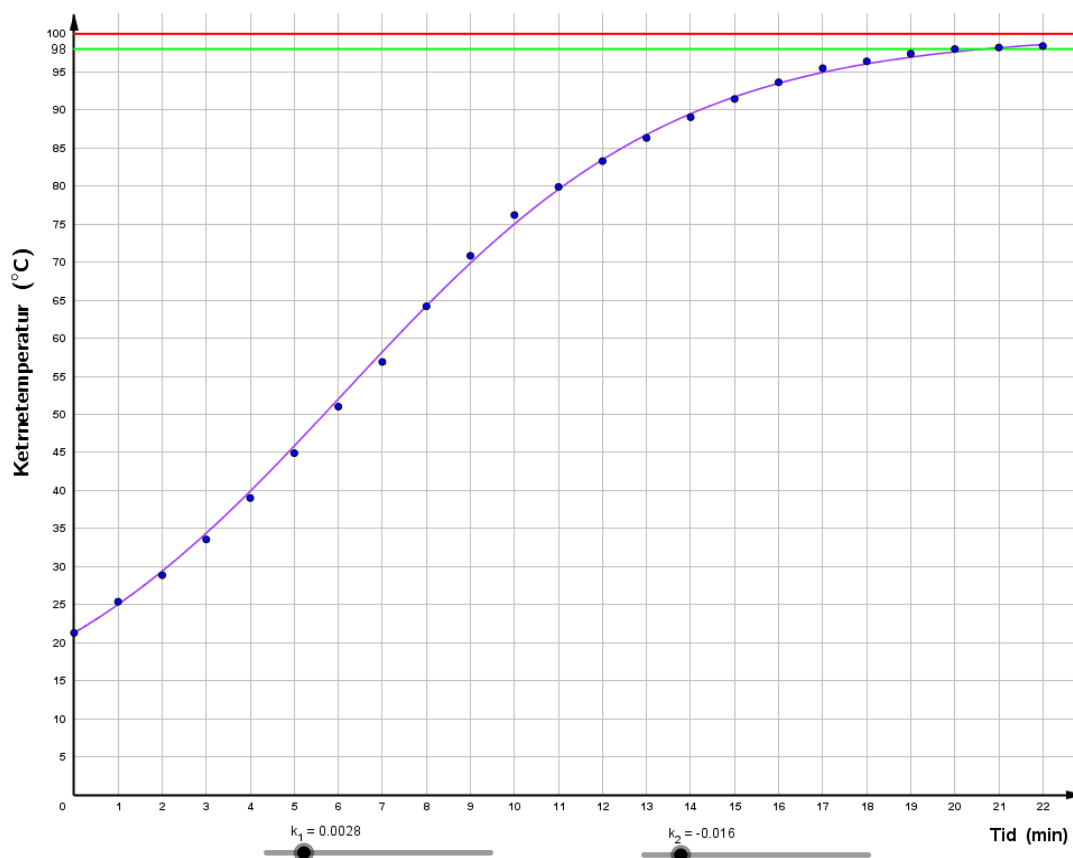
$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_b) \cdot e^{-k_2 \cdot t}$$

der altså er den samme løsning som for den simple model, blot erstattes k med k_2

Hvis $T_0 = 100\text{ °C}$ og $T_b = 21,3\text{ °C}$ fås:

$$T(t) = \frac{100\text{ °C} - k_2 \cdot \frac{78,7\text{ °C}}{21,3\text{ °C} \cdot k_1 + k_2} \cdot e^{-(k_1 \cdot 100\text{ °C} + k_2) \cdot t}}{1 + k_1 \cdot \frac{78,7\text{ °C}}{21,3\text{ °C} \cdot k_1 + k_2} \cdot e^{-(k_1 \cdot 100\text{ °C} + k_2) \cdot t}}$$

Ved at indføre to skydere for k_1 og k_2 , og tilpasse værdierne så grafen for $T(t)$ ligger så tæt på de målte værdier som muligt, fås følgende:



Figur 10 Newtons afkølings/opvarmningslov for en kartoffel, hvor k er erstattet med $h \cdot (a \cdot T + b)$. Værdierne for k_1 og k_2 fremgår af figuren.

Denne model giver en mere tilfredsstillende beskrivelse af temperaturudviklingen. Så tages der hensyn til usikkerheden på både tidsmålingen og temperaturmålingen, kan denne model siges at være acceptabel til beskrivelse af temperaturudviklingen i kernen af kartofler.